

7.ÜNİTE

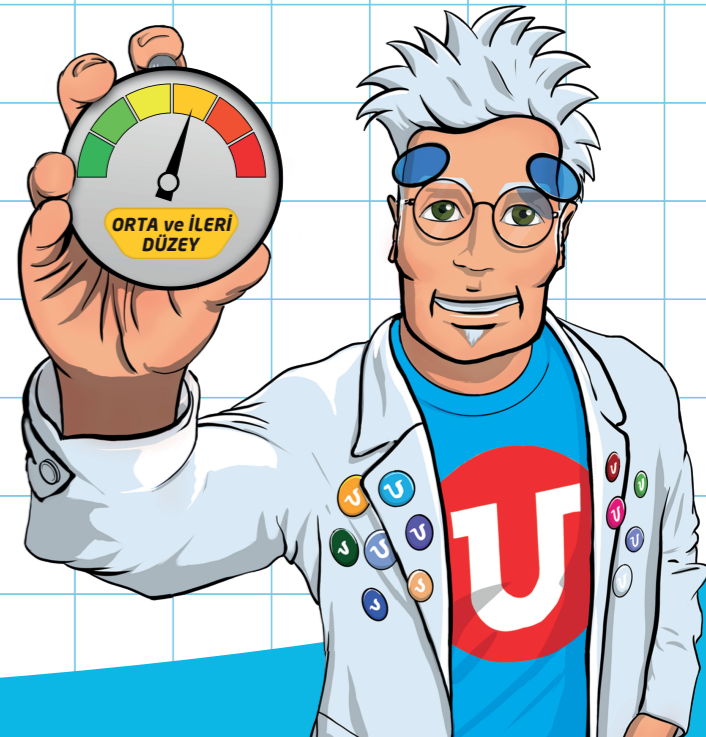


# AYT Orta ve İleri Düzey Matematik Soru Bankası

## Limitin Özellikleri ve Limit Alma Kuralları



ALİ ALBAN - ABDULLAH SARIGÜL



# LİMİTİN ÖZELLİKLERİ VE LİMİT ALMA KURALLARI

**TANIM**

**KRİTİK NOKTALAR**

**SAĞ VE SOL LİMİT**

**SONSUZ ÜZERİNDE İŞLEMLER**



# LİMİT

## TANIM :

→  $x$ ,  $a$  ya sonsuz biçimde yaklaştığında  $f(x)$   $b$  gibi bir reel sayıya yaklaşıyor ise  $f(x)$  fonksiyonunun  $x=a$  noktasındaki limiti  $b$  dir denir ve

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ şeklinde gösterilir.}$$

**Kısaca fonksiyonun almaya çalıştığı değer demektir.**



## ● KRİTİK NOKTA :

→  $\sqrt[n]{f(x)}$  ,  $f(a)=0$  ise  $a$  kritik noktadır.

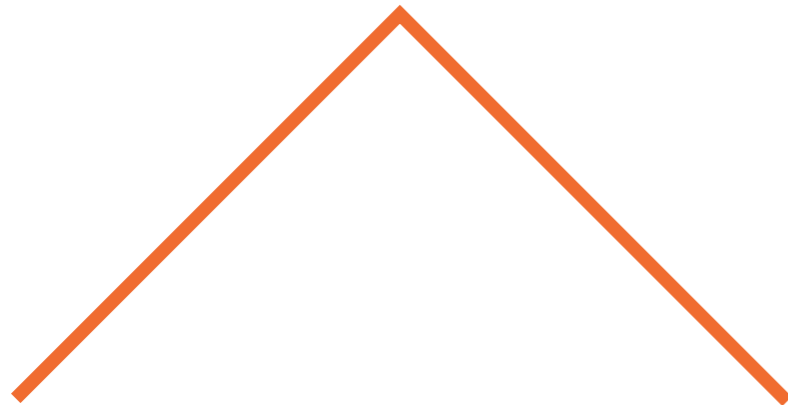
→  $\log_m f(x)$  ,  $f(a)=0$  ise  $a$  kritik noktadır.

→  $\frac{f(x)}{g(x)}$  ,  $g(a)=0$  ise  $a$  kritik noktadır.

→  $f(x) = \begin{cases} h(x), & x < a \\ g(x), & x > a \end{cases}$  ,  $a$  kritik noktadır.

→  $|f(x)|$  ,  $f(a) = 0$  ise  $a$  kritik noktadır.

# GRAFİK ÜZERİNDE KRİTİK NOKTALAR



Kırılma



Sıçrama



Kopma



UZMANLAR  
YAYINLARI

## • NOT :

→ a noktası belirsizlik oluşturmuyor veya kritik nokta değil ise,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

→ a noktası kritik nokta ise,



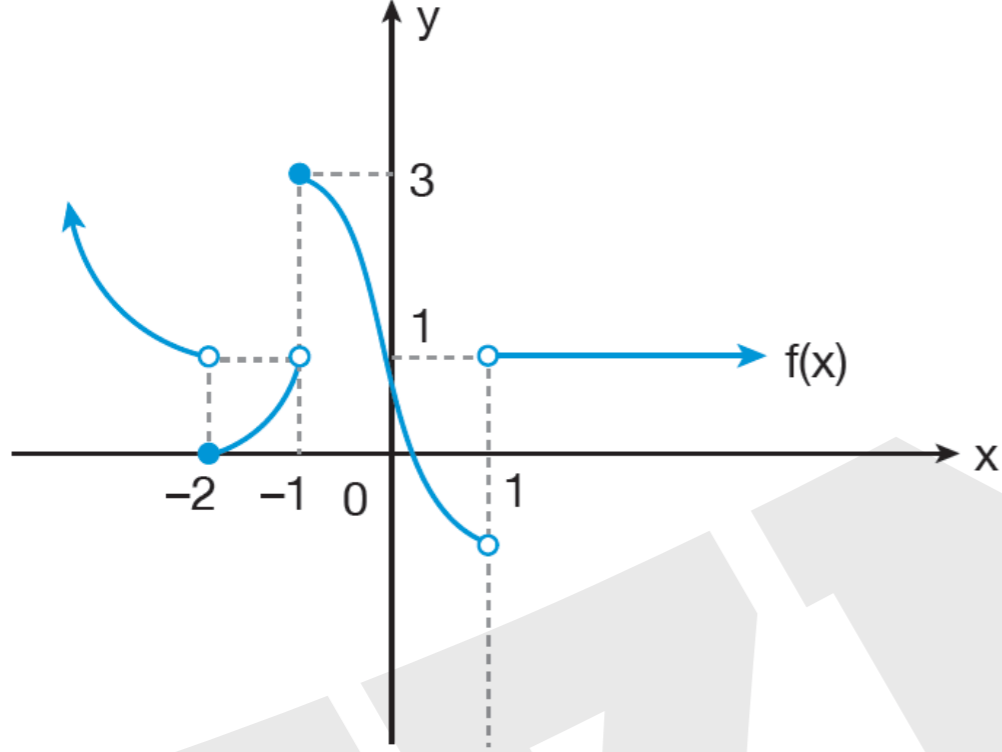
**SAĞ VE SOL LİMİT**

**UZMAN**

**YAYINLARI**



## Örnek:



Yukarıda  $f(x)$  fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A)  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 1$

B)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 3$

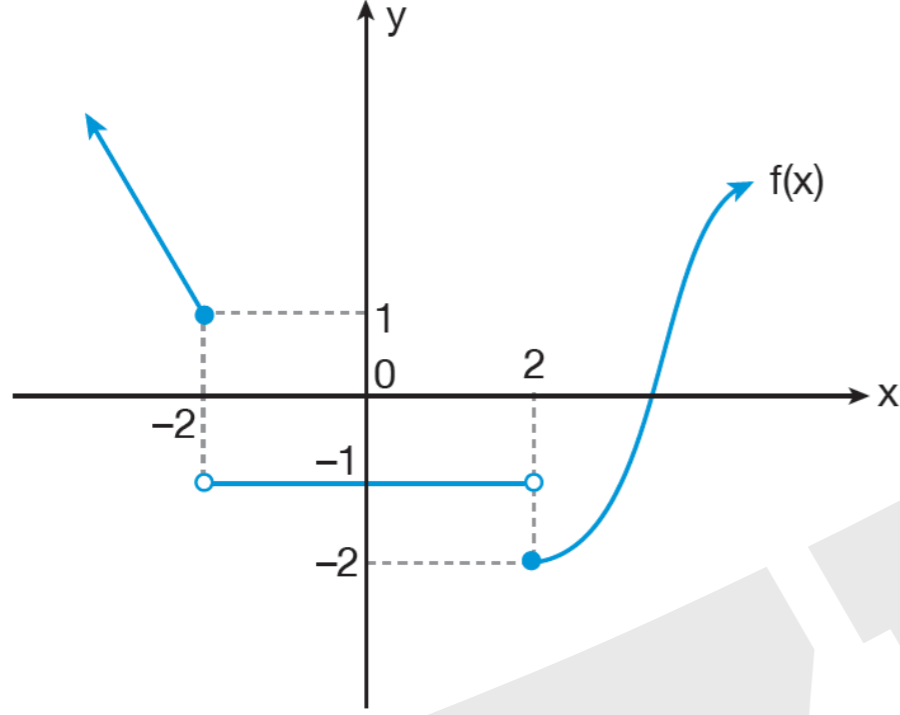
C)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$

D)  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$

E)  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0$



## Örnek:



Yukarıda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre,

I.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} (f \circ f)(x) = -1$

II.  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(1 - x) = -1$

III.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(3x - 1) = -2$

ifadelerinden hangisi ya da hangileri doğrudur?

A) Yalnız I

B) I ve II

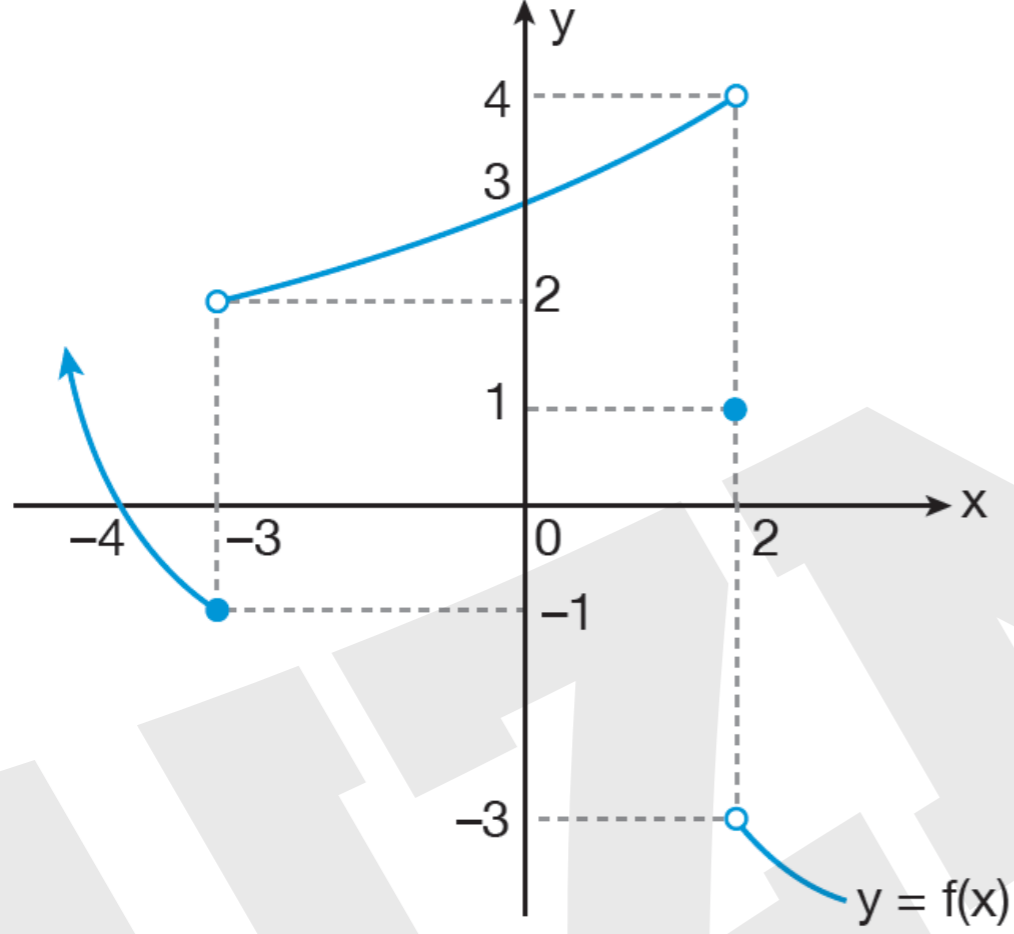
C) I ve III

D) II ve III

E) I, II ve III



## Örnek:



Yukarıda grafiği verilen  $f(x)$  fonksiyonuna göre

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} (f \circ f \circ f)(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(6 - 2x)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -4      B) 3      C) 8      D) -3      E) 4



## Örnek:

Aşağıda limit ifadeleri ve sonuçları verilmiştir.

I.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5x}{|x|} = 5$

II.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{|1-x|} = -1$

III.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{2-x}$  ifadesinin limiti yoktur.

**Buna göre, yukarıdaki işlemlerden hangisi veya hangilerinin sonuçları doğru belirtilmiştir?**

A) Yalnız I

B) I ve II

C) II ve III

D) I ve III

E) I, II ve III



## Örnek:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x > 3 \text{ ise} \\ 5, & x = 3 \text{ ise} \\ 2x^2 - 6x - 1, & x < 3 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre,

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x+2)}{\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)}$$

limitinin değeri kaçtır?

A) -1

B) 0

C) 1

D) 3

E) 4



## Örnek:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x < 2 \text{ ise} \\ x^2 - 1, & x \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1 \text{ ise} \\ 4x - 1, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonları veriliyor.

**Buna göre,**

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (g \circ f)(x) + \lim_{x \rightarrow -1^-} (f \circ g)(x)$$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6



## Örnek:

Gerçek sayılar kümesinde tanımlı  $f$  fonksiyonu her  $x$  için

$$-2 \leq f(x) < 0$$

eşitsizliğini sağlamaktadır

**Buna göre,**

- I.  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  vardır.
- II.  $\lim_{x \rightarrow 1} |f(x)|$  vardır.
- III.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{|f(x)|}$  vardır.

ifadelerinden hangisi veya hangileri daima doğrudur?

A) Yalnız I

B) Yalnız II

C) Yalnız III

D) I ve II

E) II ve III



## Örnek:

$k$ , bir gerçel sayı olmak üzere, gerçel sayılar kümesinde tanımlı  $f$  ve  $g$  fonksiyonları için,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = k$$

olduğu biliniyor.

**Buna göre,**

- I.  $f(a) - g(a) = 0$
- II.  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = 2k$
- III.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

ifadelerinden hangisi ya da hangileri kesinlikle doğrudur?

- A) Yalnız I                      B) Yalnız II                      C) I ve II  
D) II ve III                      E) I ve III



## Örnek:

Reel sayılarda tanımlı  $f$  fonksiyonu için,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 \text{ ve } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$$

olduğu biliniyor.

**Buna göre,**

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(3x - 1) + f(x^2 + 1)}{f(3 - x) + f\left(\frac{2}{x}\right)}$$

**limitinin değeri kaçtır?**

- A) 2      B)  $\frac{4}{3}$       C) 1      D)  $\frac{3}{4}$       E)  $\frac{1}{2}$





# SONSUZ ÜZERİNDE İŞLEMLER

$$\rightarrow \frac{0}{a} = 0, \quad \frac{a}{\pm\infty} = 0$$

$\rightarrow a > 0$  için

$$\frac{a}{0^+} = \infty, \quad \frac{a}{0^-} = -\infty$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} r^x = \begin{cases} 0 & |r| < 1 \text{ ise} \\ \mp\infty & |r| > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\rightarrow \infty + \infty = \infty$$

$$\rightarrow -\infty - \infty = -\infty$$

$$\rightarrow \infty \cdot \infty = \infty$$

$$\rightarrow a \pm \infty = \pm \infty$$

## Örnek:

I.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 3x}{5x} = \frac{3}{5}$

II.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{x+2} + 3 \right)^{-x+2} = 0$

III.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{3^{x+2}} + 5^{-x} + 2 \right) = 3$

Yukarıda verilen ifadelerden hangisi veya hangileri doğrudur?

A) Yalnız I

B) I ve II

C) II ve III

D) I ve III

E) I, II ve III



**Örnek:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 5^x + 3^{\frac{1}{x-2}} + 4 \right)$$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 12

B) 8

C) 5

D) 4

E) 3



## Örnek:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{(x - 2)^2}, & x > 1 \text{ ise} \\ \frac{x + 1}{x}, & -1 < x < 1 \text{ ise} \\ \frac{x + 2}{|x + 2|}, & x \leq -1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun reel sayılarda limitinin olmadığı kaç tane  $x$  değeri vardır?

- A) 1      B) 2      C) 3      D) 4      E) 5